古典群の佐武同型について(整数論:保型形式と関連する研究)

AUTHOR(S):

鍛島, 康裕

数理解析研究所講究録
727巻 1990年 81-92

古典群の佐武同型について

名大理 鍜島 康裕 (Yasuhiro, Kajima)

本稿は、$\mathfrak{p}$-進体上の古典群 ((O), (Sp), (U), (U$^+$), (U$^-$)) に関する local Hecke 環の、いわゆる佐武同型を、Macdonald が Chevalley 群に対して行った idea を用いて、具体的に記述することを目的とする。(ただし、簡単のために、(O) の $n=2\nu$ の場合は除く。この場合は、最もやさしいが、Weyl 群が他の場合と異るので。)

G を p-進体上の連結代数群として、K をその Maximal compact subgroup とする。また $\mathcal{L}(G)$ を G 上の $\mathbb{C}$-valued function で compact 台を持つものとする。このとき、ヘッケ環 $\mathcal{L}(G,K)$ を
$$\mathcal{L}(G,K)=\{f\in\mathcal{L}(G) \mid f(kxk')=f(x) \text{ for all } k,k'\in K\}$$
とする。ただし、その乗法は $f_1, f_2\in\mathcal{L}(G,K)$

に対し、$(f_1 * f_2)(g) = \int_G f_1(g g_1^{-1}) f_2(g_1)\, dg_1$
で定義する。明らかに $f_1 * f_2 \in \mathcal{L}(G, K)$ である。今ここで、Satake[3] は、代数群 G に関するある条件が満足されているとき、$\mathcal{L}(G, K)$ は、K に関する zonal spherical function $\omega_s(x)$ によって、Fourier 変換 (Satake変換)

$$\varphi \in \mathcal{L}(G, K) \longrightarrow \hat{\varphi} = \int_G \omega_s(g)\, \varphi(g)\, dg$$

を行うことにより、ある多項式環に同型に移されることを示した。(この時、特に $\mathcal{L}(G, K)$ は可換である。) そして[3] では、与えられたベクトル空間 V 上の ε-Hermitian form に対する similitude として定まる代数群の連結成分を G とし(古典群)、V の Maximal lattice に対する stabilizer としての Maximal compact subgroup K に対して、前述の仮定が満されることが示されている。よって、ここでは、それらの古典群に対する同型を具体的に書くことにする。またここで、$\mathcal{L}(G, K)$ は compact support を持っているので、それは、KxK の characteristic function Ch_{KxK} の $\mathbb{C}$ 上の有限和で書ける。

そしてまた $\omega_s(x)$ は、K-両側不変なので、

$$\int_G \omega_s(g^{-1})\, ch_{Kx_1K}(g)\,dg = \omega_s(x_1^{-1}) \times (Kx_1K\text{ の体積})$$

となるので、zonal spherical function の具体的な型と、KxK の体積 $=[KxK;K]$ が求められれば良いことが分る。よって§2では $\omega_s(x^{-1})$ の具体的な型を求め、§3では $[KxK;K]$ を求めることとする。

§1 準備

k を p-進体とする、ただし 2 は整数環で unit とする。また k' は k 自身又は、k の 2 次拡大または k 上の中心的四元数体とする。そして e を k'/k の分岐指数、$k'(k)$ 上の素イデアルを $\mathfrak{P}=(\Pi)$ $(\mathfrak{p}=(\pi))$ とおく。また $x \to \bar{x}$ を k'/k の canonical involution とする。そして、V を k' 上の n 次元ベクトル空間、そして $\langle\ ,\ \rangle$ を V の non-degenerate ε-Hermitian form とする。すなわち $\langle x, y\rangle = \varepsilon\overline{\langle y, x\rangle}$, $\langle xa, yb\rangle = a\langle x, y\rangle\bar{b}$ for all $x, y \in V$, $a, b \in k'$.

これらは、次の 5 つに分類される。

(O). $k' = k$ $\varepsilon = 1$, (Sp). $k' = k$, $\varepsilon = -1$.

(U). k'はkの2次拡大、$\varepsilon=1$.

(U^+) k'は kの quaternion. $\varepsilon=1$.

(U^-) 〃 $\varepsilon=-1$,

いま、Vの$\langle\ ,\ \rangle$の Witt index をνとする。

このとき、$n=n_0+2\nu$として、n_0を定め、Vの Basis $\{e_1,\dots,e_\nu,f_1,\dots,f_{n_0},e'_\nu,\dots,e'_1\}$を次のように取れる。$\langle e_i,e_j\rangle=\langle e'_i,e'_j\rangle=0$. $\langle e_i,e'_j\rangle=\delta_{ij}$ $f_m\in(\sum e_ik'+e'_jk')^\perp$, $m=\{1,\dots,n_0\}$. $\langle f_i,f_j\rangle=0$ if $i\neq j$ そして$\langle f_i,f_i\rangle\in\mathcal{O}\setminus\mathfrak{p}^2$ としておく。ここで $\langle f_1,f_1\rangle\in\mathcal{O}^*\cdots\langle f_\alpha,f_\alpha\rangle\in\mathcal{O}^*$, $\langle f_{\alpha+1},f_{\alpha+1}\rangle\in\mathfrak{p}\setminus\mathfrak{p}^2$, $\cdots\langle f_{\alpha+\beta},f_{\alpha+\beta}\rangle\in\mathfrak{p}\setminus\mathfrak{p}^2$ としておく。すると $L=\mathcal{O}[e_1\cdots e_\nu,f_1\cdots f_{n_0},e'_\nu,\cdots e'_1]$は norm 0 の Maximal lattice である。(norm 0 という仮定は必要ではないが簡単のため norm 0 とする。) そして、Vの k'線型変換を行列(g_{ij})で、

$(e_1,\dots,e_\nu,f_1,\dots,f_{n_0},e'_\nu,\dots,e'_1)\longrightarrow(e_1,\dots,e_\nu,f_1,\dots,f_{n_0},e'_\nu,\dots,e'_1)(g_{ij})$

として同一視する。そして、Gを、

$\tilde{G}=\{g\in GL(V)\mid\langle gx,gy\rangle=\mu(g)\langle x,y\rangle,\ x,y\in V,\ \mu(g)\in k^*\}$

の連結成分、また、$K=\{k\in G\mid kL=L\}$. また、

$H=\{h=\mathrm{diag}(\xi_1,\cdots\xi_\nu,h_0,\xi_0\bar{\xi}_\nu^{-1},\cdots\xi_0\bar{\xi}_1^{-1})\in G\mid\xi_i\in k'^*$

$\xi_0 \in k^*$, $h_0 \in G_0$, $\mu_0(h_0) = \xi_0 \}$ ここで、G_0は

$V_0 = \sum f_i k'$ の similitude、μ_0 はG_0の multiplicator

である。そしてNを
$$N = \left\{ n = \begin{pmatrix} \begin{smallmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ * & & 1 \end{smallmatrix} & 0 & 0 \\ * & I_{n_0} & 0 \\ * & * & \begin{smallmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ * & & 1 \end{smallmatrix} \end{pmatrix} \begin{matrix} \}\nu \\ \\ \}\nu \end{matrix} \in G \right\}$$
とする。

そしてまた記号(2)とe_0を次で定める。

$$(2) = \begin{cases} 1 & \text{if } n_0 = 0 \\ 2 & \text{if } n_0 > 0 \end{cases}, \qquad \mathrm{ord}_p\, \mu_0(G_0) = \frac{(2)}{e_0}\mathbb{Z}.$$

また、$M = \frac{1}{e}\mathbb{Z}^\nu \times \frac{1}{e_0}\mathbb{Z}$ として

$(m) = \left(\frac{m_1}{e}, \cdots, \frac{m_\nu}{e}, \frac{m_0}{e_0}\right) \in M$ に対して

$$\Pi^{(m)} = \begin{cases} \mathrm{diag}(\Pi^{m_1}, \ldots, \Pi^{m_\nu}, \pi^{m_0}\bar{\Pi}^{-m_1}, \ldots, \pi^{m_0}\bar{\Pi}^{-m_\nu}) & \text{if } n_0 = 0 \\ \mathrm{diag}(\Pi^{m_1}, \ldots, \Pi^{m_\nu}, \omega^{m_0}, \mu_0(\omega)^{m_0}\bar{\Pi}^{-m_\nu}, \ldots, \mu_0(\omega)^{m_0}\bar{\Pi}^{-m_1}) & \text{if } n_0 > 0 \end{cases}$$

とする。ここでωは $\mathrm{ord}_p\, \mu_0(\omega) = \frac{2}{e_0}$ となるG_0

の元とする。また、群Dを $\Pi^{(m)}$, $(m) \in M$ で生成

される群とする。そしてδをDの character として

$h \in H \cap GL(n, \theta)$ に対し $\delta(h) = 1$ とおくことにより

δをHの character と見る。この時次が成り立つ。

$$G = KHK = KDK \quad (\text{Cartan分解})$$
$$= KHN = KDN \quad (\text{Iwasawa分解})$$
このとき

Gのkに関する zonal spherical function を次で定める。

$$\omega_\delta(x^{-1}) := \int_K \phi_\delta(xk)\, dk$$

ただし、$\phi_\delta(x) = \delta(h)\, \delta^{\frac{1}{2}}(h)$, $x = khn$ (Iwasawa分解)

また、Nの Haar measure $d(n)$ に対して

$\delta(h)=d(n)/d(hnh^{-1})$ とする。また $\int_K dk=1$ としておく。次にルート系 Σ を次のように定める。

$\Sigma=\{\pm\varepsilon_i, \pm\varepsilon_i\pm\varepsilon_j \mid 1\leq i, j\leq \nu, i\neq j\}$

ここで ε_i は、$\mathbb{R}$ 上の ν-次元ベクトル空間のベースとする。また、ε_ν, $\varepsilon_i-\varepsilon_{i+1}$, $1\leq i\leq \nu-1$ を simple root と呼ぶ。また、M に作用する群 $\mathfrak{W}$ (作用を $w(m)$ と書く)であるワイル群は、

A.「$(m_1,\cdots,m_\nu)$ のすべての permutation」および

B「$w^{(i)}=\begin{cases} m_i\to -m_i+(2)\dfrac{e}{e_0}m_0 \\ m_j\to m_j \quad (j\neq i)\end{cases}$」によって生成

される群であるとする。A は、明らかに Σ に作用していると見なせ、B は $W^{(i)}$ が $\varepsilon_i\to-\varepsilon_i$ $\varepsilon_j\to\varepsilon_j$ $(i\neq j)$ として Σ に作用していると見れる。よって $\mathfrak{W}$ は Σ に作用していると見れる。また、K の中で、W と同型で、(その同型を σ と書くと) $\sigma(w)^{-1}\Pi^{(m)}\sigma(w)=\Pi^{w(m)}$ となるものがある。それを $\mathfrak{W}$ と同一視する。また、任意の simple root a に対し、$W_a(a)=-a$, $W_a(\Sigma^+\setminus\{a\})=\Sigma^+\setminus\{a\}$ (Σ^+ は positive root) となる $W_a\in\mathfrak{W}$ が存在する。これを a に対する simple reflection と呼ぶ。また、任意の $w\in\mathfrak{W}$ は simple reflection の積で書けるが、$w=w_1\cdots w_r$ と simple reflection

の積で書いた時の最小の r を $l(w)$ と書く。

§2. $W_S(x^{-1})$ の計算. Macdonald にならって, K の Bruhat 分解を考える。ただし, anisotropic part のため, 都合のいい Iwahori 部分群が取れない。それで次のようにする。

$$K=\left(\begin{array}{c|c|c} A & & B \\ \hline C & & D \end{array}\right) \quad \text{とおいた時} \quad K'=\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}\in GL(2\nu+\alpha,\mathcal{O})$$

は, 有限体 $\mathcal{O}/\mathfrak{p}$ 上 $\{e_1,\cdots e_\nu, f_1,\cdots,f_\alpha, e'_\nu,\cdots,e'_1\}$ に関する ε-Hermitian matrix と見れる。(A, B, C, D は, それぞれ $(\nu+\alpha)\times(\nu+\alpha)$, $(\nu+\alpha)\times\nu$, $\nu\times(\nu+\alpha)$, $\nu\times\nu$, 行列)

また, 任意の $\mathcal{O}/\mathfrak{p}$ 上の, $\{e_1,\ldots,e_\nu, f_1,\ldots,f_\alpha, e'_\nu,\ldots,e'_1\}$ に関する ε-Hermitian matrix $\bar{K}'$ は $(\bar{K}'\in GL(2\nu+\alpha,\mathcal{O}/\mathfrak{p}))$ $K''\in GL(2\nu+\alpha,\mathcal{O})$ で $K''\equiv K' \mod \mathfrak{p}$ で, K'' が $\{e_1,\ldots,e_\nu,f_1,\ldots,f_\alpha,e'_\nu,\ldots,e'_1\}$ に関して体 k' 上の ε-Hermitian matrix となるものが存在することが分る。これらのことより, Maximal compact subgroup K は

$$K=\{k_1\cdot k_2 \mid k_1\in K_1,\ k_2\in K_2\}$$

となる。ただしここで K_1, K_2 は

$$K_1=\left\{k_1\in G \;\middle|\; k_1=\begin{array}{c} \left(\begin{array}{c|c|c} * & 0 & * \\ \hline 0 & * & 0 \\ \hline * & 0 & * \end{array}\right) \end{array}\begin{array}{l}\}\nu+\alpha \\ \}\beta \\ \}\nu\end{array}\right\},\quad K_2=\left\{k_2\in G \;\middle|\; k_2\equiv\left(\begin{array}{c|c|c} I_{\nu+\alpha} & * & 0 \\ \hline * & I_\beta & * \\ \hline 0 & * & I_\nu \end{array}\right)\right\}$$

である。ここで, K_1, K_2 は群になっている。

ここで、K_1 は、($\langle f_i, f_i\rangle \in \mathfrak{p}$ となる f_i に関する部分が無視できることから、) 次のように分解出来る。(Bruhat 分解)

$$K_1 = \bigcup_{w \in W} BwB \ (\text{disjoint union}) \qquad \text{ただし}$$

$$B = \left\{ k \in G \;\middle|\; k \equiv \left(\begin{array}{c|c|c} \begin{matrix} \times & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \times \end{matrix} & * & * \\ \hline 0 & \times & * \\ \hline 0 & 0 & \begin{matrix} \times & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & * \end{matrix} \end{array}\right) \begin{matrix} \}\, \nu+\alpha \\ \}\, \beta \\ \}\, \nu \end{matrix} \mod \mathfrak{p} \right\}$$ である。

これらのことより、Macdonald と同様に、K を分解出来る。また、ルートに対する unipotent subgroup として、例えば (U) で $\delta = \begin{pmatrix} & & 1 \\ & \delta_0 & \\ 1 & & \end{pmatrix}$ $\delta_0 = \begin{pmatrix} 1 & \\ & \pi \end{pmatrix}$ とするとき、ルート ε_ν に対する unipotent subgroup として、$U = \begin{pmatrix} I_{\nu-1} & & \\ & A & \\ & & I_{\nu-1} \end{pmatrix}$

ただし $A = \begin{pmatrix} 1 & -y & -\pi y & z \\ & 1 & & y \\ & & 1 & x \\ & & & 1 \end{pmatrix}$ $\quad z = -\frac{1}{2}(\pi x^2 + y^2)$

となる。ここで、$z \in \mathcal{O}$ であるとすると、($2 \in \mathcal{O}^*$) 明らかに、$x \in \mathcal{O}$ かつ $y \in \mathcal{O}$ となるが、このことによって、群 U は z の部分によって統制されることになる。一般の場合には、次の lemma より分る。

Lemma $\quad V_0$ を anisotropic space として、その orthogonal basis を $\{f_1, \ldots, f_{n_0}\}$ とすると

$\mathrm{ord}_{\mathfrak{p}} \langle f_1 x_1 + \cdots + f_{n_0} x_{n_0}, f_1 x_1 + \cdots + f_{n_0} x_{n_0} \rangle = \mathrm{Min}\{\mathrm{ord}_{\mathfrak{p}} \langle f_i x_i, f_i x_i \rangle, 1 \leq i \leq n_0\}$ となる。 ($2 \in \mathcal{O}^*$ という仮定を用いて)

これらのことを用いて、Macdonald の idea を少し変形して計算していくことが出来る。次に、その結果を書く。

最初に simple root a と、D の character δ に対して $C_0(a,\delta)$ を次のように定義する。

1) $C_0(\varepsilon_i-\varepsilon_{i+1},\delta)=\dfrac{q-\tilde{\delta}}{q-q\tilde{\delta}}$. ここで $q=|\mathcal{O}/\mathfrak{p}|$.

$\tilde{\delta}=\delta(\pi_i)$, $\pi_i=\mathrm{diag}(\underbrace{1,\dots,1}_{i-1},\pi,\pi^{-1},1,\dots,1,\bar{\pi},\bar{\pi}^{-1},\underbrace{1,\dots,1}_{i-1})\in D$

2) $C_0(\varepsilon_\nu,\delta)=1+\dfrac{T}{1-\tilde{\delta}^2}$ ここで $\tilde{\delta}=\delta(\pi_\nu)$

$\pi_\nu=\mathrm{diag}(\underbrace{1,\dots,1}_{\nu-1},\pi,1,\dots,1,\bar{\pi}^{-1},\underbrace{1,\dots,1}_{\nu-1})\in D$, そして

$$T=\frac{q^\beta-1}{q^{(\alpha+\beta)/2}}\tilde{\delta}+\frac{q^\beta(q^\alpha-1)}{q^{(\alpha+\beta)}}\tilde{\delta}^2 \quad \text{for } (O).$$

$$=(1+\tilde{\delta})\tilde{\delta}\left(1-\frac{1}{q}\right) \qquad \text{for } (Sp)$$

$$=\frac{q^{\beta+\frac{1}{2}}-1}{q^{(\alpha+\beta+1)/2}}\tilde{\delta}+\frac{q^{\beta+\frac{1}{2}}(q^{\frac{1}{2}+\alpha}-1)}{q^{(\alpha+\beta+1)}}\tilde{\delta}^2 \quad \text{for } (U),\ e=1.$$

$$=\frac{q-1}{q^{(\alpha+1)/2}}\tilde{\delta}+\frac{q(q^\alpha-1)}{q^{(\alpha+1)}}\tilde{\delta}^2 \quad \text{for } (U)\ e=2$$

$$=\frac{q-1}{q^{(\alpha+2)/2}}\tilde{\delta}+\frac{q(q^{(\alpha+\frac{1}{2})}-1)}{q^{(\alpha+2)}}\tilde{\delta}^2 \quad \text{for } (U^+)$$

$$=\frac{q^\beta-1}{q^{(\frac{1}{2}+\alpha+\beta)/2}}\tilde{\delta}+\frac{q^\beta(q^{(\frac{1}{2}+\alpha)}-1)}{q^{(\frac{1}{2}+\alpha+\beta)}}\tilde{\delta}^2 \quad \text{for } (U^-)$$

そして．他の root に対しては．$c_0(a,s) = c_0(wa, ws)$ によって定義する。ここで $ws(d) = s(w^{-1}dw)$。

次に $c(s) = \prod_{a \in \Sigma^+} c_0(a,s)$ で定義する。この時．

Theorem 1　D の character s は $c_0(a,s)$ の分母を 0 にしないとする。このとき．

$$w_s(x^{-1}) = V\,\delta^{\frac{1}{2}}(x) \sum_{w \in \overline{W}} c(ws^{-1}) \cdot (ws)(x)$$

ここで V は constant で．$x = \pi^{(m)}$．$m_1 \geqq \cdots \geqq m_\nu \geqq \frac{[2]e}{2e_0} m_0$．また V は．$s = \delta^{-\frac{1}{2}}$ とおいて．すぐ求まる。

§3. $[KxK : K]$ の計算．

明らかに $\mathrm{ord}_p\, \mu(x) = 0$ 又は 1 と仮定して良い。（$y = \pi I_n$ に対し．$[KxK:K] = [Kxy^m K : K]$ for all $m \in \mathbb{Z}$ であり．$\mathrm{ord}_p\, \mu(y) = 2$ なので．）

3.1　$\mathrm{ord}_p\, M(x) = 0$ の場合．　この場合．$x = \pi^{(m)}$ $m_1 \geqq \cdots \geqq m_\nu$, $m_0 = 0$ とおく。この時．K の部分群 K_0 で，簡単な Bruhat 分解を持ち．かつ $[KxK:K] = [K_0 x K_0 : K_0]$ となる K_0 が存在する。それらのことより，大体 Macdonald の方法が使える。次に結果を書く為に記号を定義する。

$\overline{W}_x$ は $\overline{W}$ の部分群で．$w^{-1}xw = x$ となるものによっ

て生成されるものとする。また、$l(w)$ を w の長さ、$l'(w)$ を w の shortest expression に現れる w_ν の個数とする。また数 γ を $\gamma = 1$ for (Sp), $= \alpha$ for (O) and (U) $e=2$, とする。他の場合は $\gamma = \alpha + \frac{1}{2}$ と定める。そして $L(w) = l(w) + (\gamma - 1) l'(w)$ とする。また、w_0 を $\overline{W}$ の中で長さ最大の元、$\tilde{w}$ を $\overline{W}_x$ の中で長さ最大のものとする。この時

Theorem 2.

$$[K x K : K] = \delta(x)\, q^{-L(w_0')} \sum_{w \in \overline{W}} q^{L(w)} \cdot \Big(\sum_{w \in \overline{W}_x} q^{L(w)} \Big)^{-1}.$$

3.2 $\mathrm{ord}_p \mathcal{M}(x) = 1$ の場合、

この時、(U^+)、(U) with $e=2$、(U^-)、の3つの場合は $\mathrm{ord}_p \mathcal{M}(x) = 0$ の場合に還元される。それは、(U^+)、(U) with $e=2$ の場合には、$y = \pi I_n$ とおくと $y \in G$ であり $\mathrm{ord}_p \mathcal{M}(y) = 1$ であることと ($\pi \in k'$)、(U^-) の場合も大体同様の形の y が取れることから分る。よって (U) with $e=1$, (O), (Sp) について考える。この時、$x = x'y$ となる x', y $\mathrm{ord}_p \mathcal{M}(x') = 0$, $\mathrm{ord}_p \mathcal{M}(y) = 1$ $x' = \pi^{(m)}$, $y = \pi^{(m')}$ で $m_1 \geq \cdots \geq m_\nu$, $m_0 = 0$. $m_1' = \cdots = m_\nu' = m_0 = 1$ となるものが取れる。

ここで、$\overline{W}'$ を $\overline{W}$ の部分群で、$(m_1, \ldots, m_\nu)$ の、
すべての permutation で生成される群として、
$\overline{W}'_x = \{ w \in \overline{W}' \mid w^{-1} x w = x \}$ とおくとおく。また、
w_0'' を $w_0'' \tilde{w}' = w_0'$ で定義する。ただし、
$\tilde{w}'$ は、$\overline{W}'_x$ の長さ最大の元、w_0' は $\overline{W}'$ の
中で長さ最大の元とする。このとき、

Theorem 3

$$[KxK : K] = \delta(x') q^{-L(w_0'')} \left(\sum_{w \in \overline{W}} q^{L(w)} \right) \left(\sum_{w \in \overline{W}'_x} q^{L(w)} \right)^{-1}$$

References.

[1] A. N. Andrianov, Spherical functions for GL_n over local fields and summation of Hecke series, Math USSR Sbornik., 12 (1970), 429-451

[2] I. G. Macdonald, Spherical functions on a group of p-adic type, Advanced Study of Math, Madras., (1970).

[3] I. Satake, Theory of spherical functions on reductive algebraic groups over p-adic fields, I.H.E.S., 18 (1963)